ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THIÊN QUANG

PHƯƠNG PHÁP LAI GHÉP TÌM ĐIỂM BẤT ĐỘNG CHUNG CỦA MỘT HỌ ÁNH XẠ KHÔNG GIÃN TRONG KHÔNG GIAN HILBERT

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số: 60 46 01 12

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
TS. Trương Minh Tuyên

Thái Nguyên – 2017

Lời cảm ơn

Bản luận văn này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn và chỉ bảo tận tình của TS. Trương Minh Tuyên, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc và chân thành tới thầy.

Tôi xin gửi lời cảm ơn đến Ban Giám hiệu, phòng Đào tạo, các thầy cô trong khoa Toán - Tin đã tham gia giảng dạy, truyền thụ kiến thức cho tôi. Đặc biệt là PGS.TS. Nguyễn Thị Thu Thủy đã dạy bảo và động viên tôi hoàn thành tốt các nhiệm vụ trong cả quá trình học tập và nghiên cứu tại trường Đại học Khoa học-Đại học Thái Nguyên.

Tôi xin trân trọng cảm ơn Ban Giám hiệu trường THPT Diêm Điền cùng các đồng nghiệp và gia đình đã giúp đỡ và tạo mọi điều kiện tốt nhất cho tôi trong suốt thời gian qua.

Mục lục

Một số ký hiệu và viết tắt

H	không gian Hilbert
X	không gian Banach
$\langle ., . \rangle$	tích vô hướng trên H
$\|.\|$	chuẩn trên H
$\cup$	phép hợp
$\cap$	phép giao
$\mathbb{R}_+$	tập các số thực không âm
$G(A)$	đồ thị của toán tử A
$D(A)$	miền xác định của toán tử A
$R(A)$	miền ảnh của toán tử A
A^{-1}	toán tử ngược của toán tử A
I	toán tử đồng nhất
$\emptyset$	tập rỗng
$\forall x$	với mọi x
$\exists x$	tồn tại x
$\alpha_n \searrow \alpha_0$	dãy số thực $\{\alpha_n\}$ hội tụ giảm về α_0
$x_n \longrightarrow x_0$	dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh về x_0
$x_n \rightharpoonup x_0$	dãy $\{x_n\}$ hội tụ yếu về x_0

Mở đầu

Bài toán tìm điểm bất động chung của một họ hữu hạn hay vô hạn ánh xạ không giãn trong không gian Hilbert hay không gian Banach là một trường hợp riêng của bài toán chấp nhận lồi: "Tìm một phần tử thuộc giao khác rỗng của một họ hữu hạn hay vô hạn các tập con lồi và đóng $\{C_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ của không gian Hilbert H hay không gian Banach E", với $\mathcal{I}$ là tập chỉ số bất kỳ. Bài toán này có nhiều ứng dụng quan trọng trong các lĩnh vực khoa học khác nhau như: Xử lí ảnh, khôi phục tín hiệu, vật lý, y học ... Khi $C_i = F(T_i)$, với $F(T_i)$ là tập điểm bất động của ánh xạ không giãn $T_i,\ i = 1, 2, ..., N$, thì đã có nhiều phương pháp được đề xuất dựa trên các phương pháp lặp cổ điển nổi tiếng. Đó là các phương pháp lặp Kranoselskii, Mann, Ishikawa, Halpern, phương pháp xấp xỉ mềm hay các phương pháp sử dụng các siêu phẳng cắt...

Năm 2008, các tác giả Takahashi W., Takeuchi Y., Kubota R. đã đưa ra một số phương pháp lai ghép bao gồm phương pháp lai chiếu và phương pháp chiếu co hẹp kết hợp với phương pháp lặp Mann [6] cho bài toán tìm một điểm bất động chung của một họ ánh xạ không giãn trong không gian Hilbert. Ở đây, họ đã xây dựng một điều kiện mới (điều kiện NST (I)) mô tả mối liên hệ giữa hai họ ánh xạ không giãn. Thông qua điều kiện này thì bài toán tìm điểm bất động chung của một họ ánh xạ không giãn (có thể hữu hạn hay vô hạn) được đưa về bài toán tìm điểm bất động chung của một họ vô hạn đếm được các ánh xạ không giãn.

Mục đích của luận văn này là trình bày lại một cách có hệ thống các kết quả của các tác giả Takahashi W., Takeuchi Y., Kubota R. trong tài liệu [6]. Ngoài ra, trong luận văn chúng tôi cũng xây dựng hai ví dụ số đơn giản được lập trình và thử nghiệm bằng phần mềm MATLAB nhằm minh họa thêm cho các phương pháp lặp. Nội dung chính của luận văn được trình bày trong hai chương.

Chương 1. Một số kiến thức chuẩn bị

Trong chương này luận văn tập trung trình bày và làm rõ một số đặc trưng cơ bản của không gian Hilbert thực (các đẳng thức và bất đẳng thức cơ bản, phép chiếu mêtric, định lý tách các tập lồi, tính đóng yếu của một tập con lồi đóng), ánh xạ không giãn, nửa nhóm ánh xạ không giãn và toán tử đơn điệu trong không gian Hilbert.

Chương 2. Một số phương pháp lai ghép tìm điểm bất động chung của một họ ánh xạ không giãn

Nội dung chính của chương này là trình bày lại các kết quả của các tác giả Takahashi W., Takeuchi Y., Kubota R. đã đưa ra một số phương pháp lai ghép bao gồm phương pháp lai chiếu và phương pháp chiếu co hẹp kết hợp với phương pháp lặp Mann [6] cho bài toán tìm một điểm bất động chung của một họ ánh xạ không giãn trong không gian Hilbert cùng với các ứng dụng của chúng.

Chương 1

Một số kiến thức chuẩn bị

Chương này bao gồm hai mục chính. Mục 1.1 đề cập đến một số đặc trưng cơ bản của không gian Hilbert thực, Mục 1.2 giới thiệu sơ lược một số kết quả về ánh xạ không giãn, nửa nhóm ánh xạ không giãn và toán tử đơn điệu. Nội dung của chương này phần lớn được tham khảo từ các tài liệu [1] và [2].

1.1. Một số đặc trưng của không gian Hilbert

Ta luôn giả thiết H là không gian Hilbert thực với tích vô hướng được kí hiệu là $\langle .,. \rangle$ và chuẩn được kí hiệu là $\|.\|$.

Mệnh đề 1.1. *Trong không gian Hilbert thực H ta luôn có đẳng thức sau*

$$\|x-y\|^2 + \|x-z\|^2 = \|y-z\|^2 + 2\langle x-y, x-z\rangle,$$

với mọi $x, y, z \in H$.

Chứng minh. Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned}\|y-z\|^2 + 2\langle x-y, x-z\rangle &= \langle y,y\rangle + \langle z,z\rangle + 2\langle x,x\rangle - 2\langle x,z\rangle - 2\langle x,y\rangle \\ &= [\langle x,x\rangle - 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle] \\ &\quad + [\langle x,x\rangle - 2\langle x,z\rangle + \langle z,z\rangle] \\ &= \|x-y\|^2 + \|x-z\|^2.\end{aligned}$$

Vậy ta được điều phải chứng minh. $\square$

Mệnh đề 1.2. *Cho H là một không gian Hilbert thực. Khi đó, với mọi $x, y \in H$ và mọi $\lambda \in [0, 1]$, ta có*

$$\|\lambda x + (1-\lambda)y\|^2 = \lambda\|x\|^2 + (1-\lambda)\|y\|^2 - \lambda(1-\lambda)\|x-y\|^2. \tag{1.1}$$

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned}\|\lambda x + (1-\lambda)y\|^2 &= \lambda^2\|x\|^2 + 2\lambda(1-\lambda)\langle x, y\rangle + (1-\lambda)^2\|y\|^2 \\ &= \lambda\|x\|^2 + (1-\lambda)\|y\|^2 - \lambda(1-\lambda)(\|x\|^2 - 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2) \\ &= \lambda\|x\|^2 + (1-\lambda)\|y\|^2 - \lambda(1-\lambda)\|x-y\|^2.\end{aligned}$$

Ta được điều phải chứng minh. □

Mệnh đề 1.3. *Cho H là một không gian Hilbert thực. Khi đó, nếu với $x, y \in H$ thỏa mãn điều kiện*

$$|\langle x, y\rangle| = \|x\|.\|y\|,$$

tức là bất đẳng thức Schwars xảy ra dấu bằng thì hai véc tơ x và y là phụ thuộc tuyến tính.

Chứng minh. Giả sử ngược lại rằng $x \neq \lambda y$ với mọi $\lambda \in \mathbb{R}$. Khi đó, từ tính chất của tích vô hướng, ta có

$$0 < \|x - \lambda y\|^2 = \lambda^2\|y\|^2 - 2\lambda\langle x, y\rangle + \|x\|^2,$$

với mọi $\lambda \in \mathbb{R}$. Ta thấy rằng nếu $y = 0$, thì hiển nhiên x và y là phụ thuộc tuyến tính. Giả sử $y \neq 0$, khi đó với $\lambda = \dfrac{\langle x, y\rangle}{\|y\|^2}$, thì bất đẳng thức trên trở thành

$$|\langle x, y\rangle| < \|x\|.\|y\|,$$

điều này mâu thuẫn với giả thiết. Vậy x và y là phụ thuộc tuyến tính.
Mệnh đề được chứng minh. □

Nhắc lại rằng, dãy $\{x_n\}$ trong không gian Hilbert H được gọi là hội tụ yếu về phần tử $x \in H$, nếu

$$\lim_{n\to\infty}\langle x_n, y\rangle = \langle x, y\rangle,$$

với mọi $y \in H$. Từ tính liên tục của tích vô hướng, suy ra nếu $x_n \to x$, thì $x_n \rightharpoonup x$. Tuy nhiên, điều ngược lại không đúng. Chẳng hạn xét không gian $l^2 = \big\{\{x_n\} \subset \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\big\}$ và $\{e_n\} \subset l^2$, được cho bởi

$$e_n = (0, ..., 0, \underbrace{1}_{\text{vị trí thứ n}}, 0, ..., 0, ...),$$

với mọi $n \geq 1$. Khi đó, $e_n \rightharpoonup 0$, khi $n \to \infty$. Thật vậy, với mỗi $y \in H$, từ bất đẳng thức Bessel, ta có

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle e_n, y\rangle|^2 < \|y\|^2 < \infty.$$

Suy ra $\lim_{n\to\infty}\langle e_n, y\rangle = 0$, tức là $e_n \rightharpoonup 0$. Tuy nhiên, $\{e_n\}$ không hội tụ về 0, vì $\|e_n\| = 1$ với mọi $n \geq 1$.

Ta biết rằng mọi không gian Hilbert H đều thỏa mãn điều kiện của Opial, tính chất này được thể hiện trong mệnh đề dưới đây:

Mệnh đề 1.4. *Cho H là một không gian Hilbert thực và $\{x_n\} \subset H$ là một dãy bất kỳ thỏa mãn điều kiện $x_n \rightharpoonup x$, khi $n \to \infty$. Khi đó, với mọi $y \in H$ và $y \neq x$, ta có*

$$\liminf_{n\to\infty} \|x_n - x\| < \liminf_{n\to\infty} \|x_n - y\|. \tag{1.2}$$

Chứng minh. Vì $x_n \rightharpoonup x$, nên $\{x_n\}$ bị chặn.

Ta có

$$\begin{aligned}\|x_n - y\|^2 &= \|x_n - x\|^2 + \|x - y\|^2 + 2\langle x_n - x, x - y\rangle \\ &> \|x_n - x\|^2 + 2\langle x_n - x, x - y\rangle.\end{aligned}$$

Vì $x \neq y$, nên

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} \|x_n - y\|^2 &> \liminf_{n\to\infty} \|x_n - x\|^2 + 2\langle x_n - x, x - y\rangle \\ &= \liminf_{n\to\infty} \|x_n - x\|^2.\end{aligned}$$

Do đó, ta nhận được

$$\liminf_{n\to\infty} \|x_n - x\| < \liminf_{n\to\infty} \|x_n - y\|.$$

Mệnh đề được chứng minh. □

Mệnh đề 1.5. *Mọi không gian Hilbert thực H đều có tính chất Kadec-Klee, tức là nếu $\{x_n\} \subset H$ là một dãy bất kỳ trong H thỏa mãn các điều kiện $x_n \rightharpoonup x$ và $\|x_n\| \to \|x\|$, thì $x_n \to x$, khi $n \to \infty$.*

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned}\|x_n - x\|^2 &= \|x_n\|^2 - 2\langle x_n, x\rangle + \|x\|^2 \\ &\to 0,\ n \to \infty.\end{aligned}$$

Suy ra $x_n \to x$, khi $n \to \infty$. Mệnh đề được chứng minh. □

Mệnh đề 1.6. *Cho C là một tập con lồi và đóng của không gian Hilbert thực H. Khi đó, với mỗi $x \in H$, tồn tại duy nhất phần tử $P_C x \in C$ sao cho*

$$\|x - P_C x\| \le \|x - y\| \text{ với mọi } y \in C.$$

Chứng minh. Thật vậy, đặt $d = \inf\limits_{u \in C} \|x - u\|$. Khi đó, tồn tại $\{u_n\} \subset C$ sao cho $\|x - u_n\| \longrightarrow d,\ n \longrightarrow \infty$. Từ đó ta có

$$\begin{aligned}\|u_n - u_m\|^2 &= \|(x - u_n) - (x - u_m)\|^2 \\ &= 2\|x - u_n\|^2 + 2\|x - u_m\|^2 - 4\|x - \frac{u_n + u_m}{2}\|^2 \\ &\le 2(\|x - u_n\|^2 + \|x - u_m\|^2) - 4d^2 \longrightarrow 0,\end{aligned}$$

khi $n, m \longrightarrow \infty$. Do đó $\{u_n\}$ là dãy Cauchy trong H. Suy ra tồn tại $u = \lim\limits_{n \to \infty} u_n \in C$. Do chuẩn là hàm số liên tục nên $\|x - u\| = d$. Giả sử tồn tại $v \in C$ sao cho $\|x - v\| = d$. Ta có

$$\begin{aligned}\|u - v\|^2 &= \|(x - u) - (x - v)\|^2 \\ &= 2(\|x - u\|^2 + \|x - v\|^2) - 4\|x - \frac{u + v}{2}\|^2 \\ &\le 0.\end{aligned}$$

Suy ra $u = v$. Vậy tồn tại duy nhất một phần tử $P_C x \in C$ sao cho $\|x - P_C x\| = \inf_{u \in C} \|x - u\|$. □